La Distribución de masa o la materia oscura

Título: La Distribución de masa o la materia oscura. **Target**: Profesores de física. **Asignatura**: Física. **Autor**: Juan Baquero Vargsd, Ingeniero Técnico en Electricidad.

En el estudio de la gravedad generada por distintos cuerpos masivos de distintas formas, he encontrado una posibilidad para explicar el fenómeno de que plantea la posibilidad de le existencia de la Materia Oscura.

Sabemos que la gravedad generada por una esfera, en el exterior de la misma, de densidad constante es equivalente a que toda la masa estuviese concentrada en el centro de masa de la esfera.

Ahora si cogemos la esfera y la achatamos en uno de sus ejes, transformándola en un elipsoide, si medimos la gravedad en el exterior del elipsoide, en alguno de sus ejes no achatados, resulta que la gravedad es mucho mayor que la generada por una masa puntual situada en su centro de masa.

Y en el caso de que siguiéramos achatando la esfera y la dejáramos plana como un círculo de densidad superficial. La gravedad en los bordes del círculo sería infinita.

Para la obtención de las fórmulas del círculo y del elipsoide nos encontramos con integrales que no tienen primitivas. Pero si encontré con la formula de la gravedad generada por un rectángulo, así que dividiendo el circulo en muchos rectángulos y sumándolos encontramos una muy buena aproximación.

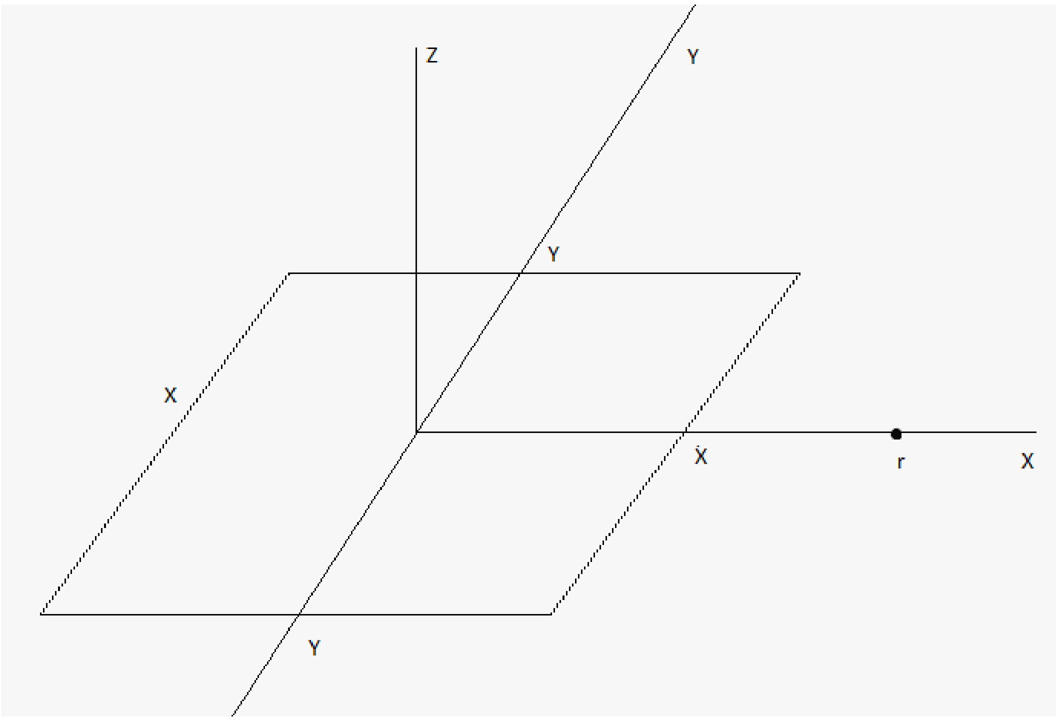
También desarrollando por las formulas a integrar por un polinomio de Taylor, el resultado es muy bueno para una distancia superior a un 50% del radio.

Si en las Galaxias las velocidades medidas en las estrellas exteriores utilizamos la formula $v^2 = GM/r$ el resultado es que falta masa para generar esa gravedad.

Si el cálculo de las masas de la Galaxias se ha hecho de esa forma, esta mal.

Estudiemos la gravedad generada por algunas formas.

Rectángulo de densidad superficial constante, superficie S en un punto situado en mismo plano. La superficie será de $4*X*Y$.



$$g=\frac{GM}{4xy}\iint_{4xy}\frac{(r-x)dxdy}{\left(y^2+(r-x)^2\right)^{3/2}}=-\frac{GM}{8xyz}\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{y^2+(r-x)^2}}-\frac{1}{\sqrt{y^2+(r+x)^2}}dy$$

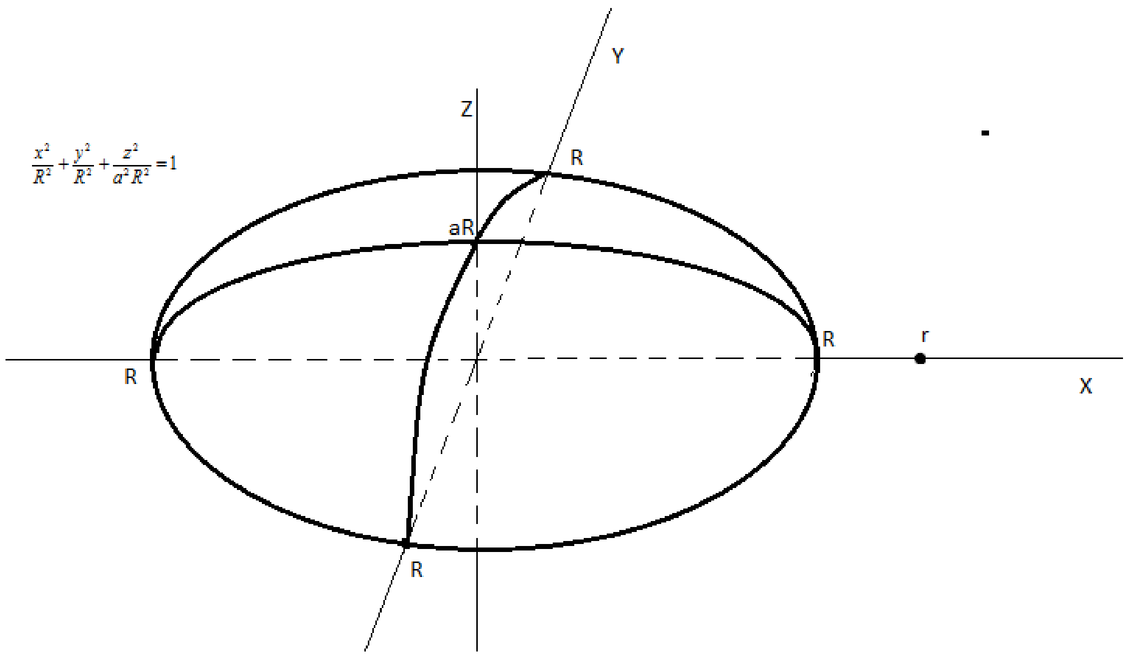
$$g=-\frac{GM}{4xy}Ln\left(\frac{\left(\sqrt{y^2+(r+x)^2}-y\right)\left(\sqrt{y^2+(r-x)^2}+y\right)}{\left(\sqrt{y^2+(r+x)^2}+y\right)\left(\sqrt{y^2+(r-x)^2}-y\right)}\right)$$

Si $r = x$ aparece un campo gravitatorio infinito.

Si en vez de ser un cuadrado es un rectángulo de superficie L^2.

$$g=-\frac{GM}{L^2}Ln\left(\frac{\left(\sqrt{L^2/4+(r+L/2)^2}-L/2\right)\left(\sqrt{L^2/4+(r-L/2)^2}+L/2\right)}{\left(\sqrt{L^2/4+(r+L/2)^2}+L/2\right)\left(\sqrt{L^2/4+(r-L/2)^2}-L/2\right)}\right)$$

Elipsoide (donde es circular en el eje X e Y (de radio *R*) y achatado en el eje Z con radio *a.R*) densidad constante, en un punto situado en el eje Y.



$$g=-\frac{GM}{4a\pi R^3/3}\left(\iiint_{\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}+\frac{z^2}{a^2R^2}=1}\frac{(r-x)dxdydz}{\left(y^2+z^2+(r-x)^2\right)^{3/2}}\right)$$

$$g=-\frac{GM}{4a\pi R^3/3}\left(\iint_{\frac{y^2}{R^2}+\frac{z^2}{a^2R^2}=1}dydz\left(\frac{1}{\left(r^2+R^2+z^2(a^2-1)/a^2-2r\sqrt{R^2-z^2/a^2-y^2}\right)^{1/2}}-\frac{1}{\left(r^2+R^2+z^2(a^2-1)/a^2+2r\sqrt{R^2-z^2/a^2-y^2}\right)^{1/2}}\right)\right)$$

Y haciendo los siguientes cambios de variables: $z=a\rho\cos(\theta)$ y $y=\rho\,\mathrm{sen}(\theta)$.

$$g=-\frac{GM}{4\pi R^3/3}\left(\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{\rho d\rho}{\left(r^2+R^2-\rho^2\cos^2(\theta)(1-a^2)-2r\sqrt{R^2-\rho^2}\right)^{1/2}}-\frac{\rho d\rho}{\left(r^2+R^2-\rho^2\cos^2(\theta)(1-a^2)+2r\sqrt{R^2-\rho^2}\right)^{1/2}}\right)$$

$$g=-\frac{GM}{4\pi R^3/3}\left(\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^3\cos^3(\theta)}Ln\left(\frac{r+R\cos(\theta)}{r-R\cos(\theta)}\right)-\frac{2R}{(1-a^2)\cos^2(\theta)}\right)d\theta\right)$$

Para su cálculo del campo gravitatorio nos encontramos con integrales que no tienen primitivas, entonces buscaremos alguna solución aproximada mediante un polinomio de Taylor. Que por cierto no es muy buena aproximación en todo *r*. La aproximación esta hecha entorno a *x =R.*

$$g=-\frac{GM}{r^2}\left(1+\frac{3(1-a^2)R^2}{10r^2}+\frac{9(1-a^2)^2R^4}{56r^4}+\frac{5(1-a^2)^4R^6}{48r^6}+\frac{105(1-a^2)^6R^8}{1408r^8}+\frac{189(1-a^2)^8R^{10}}{3328r^{10}}+\frac{231(1-a^2)^{10}R^{12}}{5120r^{12}}+....\right)$$

Para r>1.5R la aproximación es bastante buena.

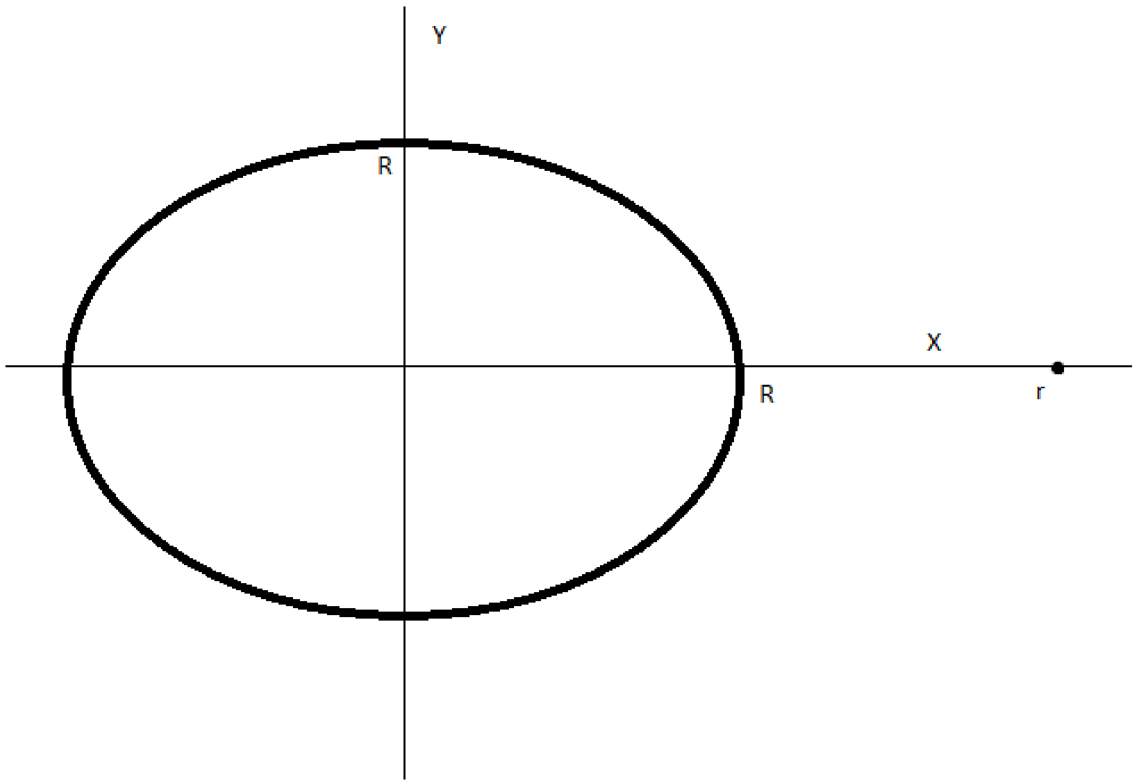
Y otra aproximación es hecha entorno a *x =R*:

$$g=\frac{-GM}{r^2}\left(\begin{array}{l}\frac{r^4\left(3R^2(1-a^2)+r^2\right)}{\left(r^2-R^2(1-a^2)\right)^3}-\frac{12r^4R^2(1-a^2)\left(R^2(1-a^2)+r^2\right)}{\left(r^2-R^2(1-a^2)\right)^4}+\frac{63r^4R^4(1-a^2)^2\left(5R^4(1-a^2)^2+10R^2(1-a^2)r^2+r^4\right)}{10\left(r^2-R^2(1-a^2)\right)^5}\\ -\frac{23r^4R^4(1-a^2)^2\left(3R^4(1-a^2)^2+10R^2(1-a^2)r^2+3r^2\right)}{\left(r^2-R^2(1-a^2)\right)^6}+\frac{1101r^4R^4(1-a^2)^2\left(7R^6(1-a^2)^3+R^4(1-a^2)^2r^2+r^6\right)}{56\left(r^2-R^2(1-a^2)\right)^3}\\ -\frac{261r^4R^6(1-a^2)^3\left(R^6(1-a^2)^3+7R^4(1-a^2)^2r^2+7R^2(1-a^2)r^4+r^6\right)}{4\left(r^2-R^2(1-a^2)\right)^3}+.....\end{array}\right)$$

Pero esta ecuación no es muy buena para distancias cercanas al radio, funciona cuando nos alejamos bastante del radio.

Para el caso particular de a = 1 (es una esfera), el resultado es correcto.

Disco circular de densidad superficial constante, superficie S en un punto situado en el mismo plano.



$$g=-\frac{GM}{\pi R^2}\iint_{x^2+y^2=R^2}\frac{(r-x)dxdy}{\left(y^2+z^2+(r-x)^2\right)^{3/2}}=-\frac{GM}{\pi R^2}\int_{-R}^{R}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+r^2-2r\sqrt{R^2-y^2}}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+r^2+2r\sqrt{R^2-y^2}}}\right)dy$$

Para su cálculo nos encontramos con los mismos problemas de integración que antes. Entonces buscaremos alguna solución aproximada mediante un polinomio de Taylor. Que por cierto no es muy buena aproximación en todo *r*. La aproximación esta hecha entorno a *x =R.*

$$g=-\frac{GM}{\pi R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+2)!\,r^{2n+1}}{2^{2n}((2n+1)!)^2\left(\sqrt{R^2+r^2}\right)^{4n+3}}\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^{2n+1}dx$$

$$g=-\frac{GM}{r^2}\left(\frac{r^3}{\left(\sqrt{R^2+r^2}\right)^3}+\frac{15r^5R^2}{8\left(\sqrt{R^2+r^2}\right)^7}+\frac{315r^7R^4}{64\left(\sqrt{R^2+r^2}\right)^{11}}+\frac{15015r^9R^6}{1024\left(\sqrt{R^2+r^2}\right)^{15}}+\frac{765765r^{11}R^8}{16384\left(\sqrt{R^2+r^2}\right)^{19}}+.......\right)$$

Y otra sería en una aproximación entorno a $x = 0$:

$$g=-\frac{GM}{r^2}\left(\begin{array}{l}\frac{2r^2}{R}\left(\frac{1}{r-R}-\frac{1}{r+R}\right)+r^3\left(\frac{\pi}{2}-2\right)\left(\frac{1}{(r-R)^3}+\frac{1}{(r+R)^3}\right)+\frac{3Rr^4}{2}\left(\frac{10}{3}-\pi\right)\left(\frac{1}{(r-R)^5}-\frac{1}{(r+R)^5}\right)\\ +\frac{5R^2r^5}{2}\left(\frac{15\pi}{8}-6\right)\left(\frac{1}{(r-R)^7}+\frac{1}{(r+R)^7}\right)+\frac{35R^3r^6}{8}\left(\frac{76}{15}-\frac{7\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{(r-R)^9}-\frac{1}{(r+R)^9}\right)\\ +\frac{63R^4r^7}{8}\left(\frac{105\pi}{16}-\frac{62}{3}\right)\left(\frac{1}{(r-R)^{11}}+\frac{1}{(r+R)^{11}}\right)+\frac{231R^5r^8}{16}\left(\frac{1678}{35}-\frac{99\pi}{8}\right)\left(\frac{1}{(r-R)^{13}}+\frac{1}{(r+R)^{13}}\right)+....\end{array}\right)$$

Para conseguir unos buenos datos cerca del radio del circulo. Dividí el círculo en una serie de rectángulos y sumé todas las gravedades de los rectángulos.

Partí de los siguientes datos: $R = 1$, $GM = 100$ y r seria proporcional a R.

$r=1.001\to g=444.05$ $\quad$ $r=1.002\to g=399.84$ $\quad$ $r=1.01\to g=296.62$

$r=1.1\to g=147.72$ $\quad$ $r=1.2\to g=104.58$ $\quad$ $r=1.5\to g=54.90$

$r=2\to g=27.77$ $\quad$ $r=3\to g=11.60$ $\quad$ $r=5\to g=4.06$

Con estos datos he obtenido una ecuación que se aproxima bastante a lo largo de toda la distancias de r.

$$g=-\frac{GM}{r^2}\left(1+Ln\left(\frac{r+R}{r-R}\right)\left(0.28671\frac{R}{r}-0.12206\frac{R^3}{r^3}-0.29739\frac{R^5}{r^5}+0.53695\frac{R^7}{r^7}\right)\right)$$

$$g=-\frac{GM}{r^2}\left(1+Ln\left(\frac{r+R}{r-R}\right)\left(0.71692-5.1861\frac{R^2}{r^2}+15228\frac{R^4}{r^4}-17.816\frac{R^6}{r^6}+7.4703\frac{R^8}{r^8}\right)\right)$$

$$g=-\frac{GM}{r^2}\left(1-0.0030388Ln\left(\frac{r+R}{r-R}\right)+0.10017\left(Ln\left(\frac{r+R}{r-R}\right)\right)^2-0.003657\left(Ln\left(\frac{r+R}{r-R}\right)\right)^3-0.0027852\left(Ln\left(\frac{r+R}{r-R}\right)\right)^4\right)$$

$$g=-\frac{GM}{r^2}\left(1+0.18831\frac{R}{r}Ln\left(\frac{r+R}{r-R}\right)+0.026001\left(\frac{R}{r}Ln\left(\frac{r+R}{r-R}\right)\right)^2+0.0045288\left(\frac{R}{r}Ln\left(\frac{r+R}{r-R}\right)\right)^3-0.00043243\left(\frac{R}{r}Ln\left(\frac{r+R}{r-R}\right)\right)^4\right)$$

Estas ecuaciones si hacemos $R = 0$ resulta que $g=-\frac{GM}{r^2}$.

Si cambiamos R por $R\sqrt{1-a^2}$ nos da la gravedad generada por un elipsoide. Donde a es relación entre radio de mayor del elipsoide con el radio menor y perpendicular al mayor.

RESUMEN

Si medimos la gravedad generada por una masa distribuida homogéneamente con forma de elipsoide nos dará una serie de valores. Por ejemplo

$$
\begin{array}{lll}
GM=100 \quad R=1 & \mathrm{a}=0.1 & \\
r=1\rightarrow g=340 & r=1.1\rightarrow g=271 & r=1.5\rightarrow g=54 \\
r=2\rightarrow g=27.77 & r=3\rightarrow g=11.60 & r=5\rightarrow g=4.06
\end{array}
$$

Si ahora cogemos la masa del elipsoide, la comprimimos en un punto y la situamos en su centro de masa y medimos la gravedad tenemos:

$$
\begin{array}{lll}
GM=100 \quad R=1 & \mathrm{a}=1 & \\
r=1\rightarrow g=100 & r=1.1\rightarrow g=82 & r=1.5\rightarrow g=44 \\
r=2\rightarrow g=25 & r=3\rightarrow g=11.1 & r=5\rightarrow g=4
\end{array}
$$

Como vemos la distribución de masa puede cambiar considerablemente la gravedad y hacer que parezca que debe haber más masa para que se genere esa gravedad.

También podemos observar que si nos alejamos bastante de del radio del elipsoide (a partir del doble del mismo) el comportamiento de la gravedad son muy similares de ambos supuestos. ●